E.N.S.I. M 1977

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

PROBLÈME

Soit $f_{\alpha,\beta}$ un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dépendant des deux paramètres réels α et β, dont la matrice, notée $A_{\alpha,\beta}$, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On considère l'équation différentielle, notée $(E_{\alpha,\beta})$, linéaire du premier ordre, à coefficients constants, dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$(E_{\alpha,\beta}) \qquad x' = A_{\alpha,\beta}\, x$$

où l'on désigne respectivement par x et x' les fonctions, dont les valeurs $x(t)$ et $x'(t)$ au point t, sont les matrices colonnes suivantes :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix}$$

sachant que $x'_i(t)$ désigne la dérivée au point t de la fonction numérique x_i, $i = 1,2$. On note alors $A_{\alpha,\beta}\, x$ la fonction $t \longrightarrow A_{\alpha,\beta}\, x(t)$.

La donnée de l'équation différentielle $(E_{\alpha,\beta})$ est équivalente à celle du système des deux équations différentielles, scalaires, linéaires, du premier ordre à coefficients constants, suivantes :

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$ et tout $\beta \in \mathrm{R}$, on admettra que l'équation $(E_{\alpha,\beta})$ possède une solution générale Φ continûment dérivable sur R dépendant des deux constantes arbitraires k_1 et k_2 :

$$t \longrightarrow \Phi(t\,;\, k_1, k_2) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t\,;\, k_1, k_2) \\ \Phi_2(t\,;\, k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

PREMIÈRE QUESTION

On demande de déterminer la solution générale de l'équation $(E_{\alpha,\beta})$ dans les sept cas suivants :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

DEUXIÈME QUESTION

a. On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure naturelle d'espace affine et d'un repère $\mathcal{R}$. Si l'on désigne par (X_1, X_2) le couple des coordonnées d'un point par rapport au repère $\mathcal{R}$, on demande, pour chacun des sept cas précédents, de construire, suivant les valeurs de k_1 et k_2, la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} X_1 = \Phi_1(t\,;\, k_1, k_2) \\ X_2 = \Phi_2(t\,;\, k_1, k_2) \end{cases}$$

b. On interprète maintenant l'équation différentielle $(E_{\alpha,\beta})$ comme définissant un mouvement ponctuel sur l'intervalle de temps $[t_0, +\infty[$ où t_0 est un scalaire fixé; la position, à l'instant t, du mobile associé à ce mouvement est donc donnée, dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R}$, par $X_1 = \Phi_1(t; k_1, k_2)$, $X_2 = \Phi_2(t; k_1, k_2)$. On demande alors pour chacun des sept cas déjà étudiés, de déterminer la trajectoire du mobile suivant sa position (X_1^0, X_2^0) à l'instant initial t_0 et d'expliciter ces résultats sur les courbes tracées lors du paragraphe précédent.

N.B. — A chaque cas, on associera une figure sur laquelle les courbes seront tracées avec soin.

Les résultats du *b.* de la deuxième question seront explicités de la façon suivante. Sur chaque figure correspondant aux cas traités, on donnera, pour chaque trajectoire possible, un exemple de position initiale M_0^i et de position M_t^i à l'instant t, l'indice i permettant ainsi de distinguer les différentes trajectoires possibles sur une même figure.

Des figures claires et complètes ne doivent en aucun cas exclure une rédaction nette et rigoureuse, le passage de l'une aux autres devant toujours se faire à l'aide de références précises.

FIN

×926×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail